ca. 1637 Pierre de Fermat (1601 – 1665) liest das Buch Arithmetica von Diophantos

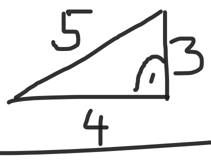
Zu $x^n + y^n = z^n$ schreibt er: „Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“

$a^2 + b^2 = c^2$, $a, b, c \in \mathbb{N}$

$1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5$

$3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$

3, 4, 5



$5^2 + 12^2 = 13^2$

$8^2 + 15^2 = 17^2$

$64 + 225 = 289$

unendlich viele pythagoräische Zahlentripel

Cubum autem in duos cubos, aut quadratoquadratum in duos quadratoquadratos, et generaliter nullam in infinitum ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fas est dividere: cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis exiguitas non caperet.

Pierre de Fermat

1670 Fermats Sohn veröffentlicht die Arithmetica mit den 48 Anmerkungen Fermats

ca. 1745 Euler (1707 -1783) entdeckt in den Notizen Fermats einen Beweis für n = 4

1753 Euler veröffentlicht einen Beweis für n = 3

1993/1994 wurde der „Große Fermat“ von Andrew Wiles (Cambridge) bewiesen, allerdings mit Mitteln, die Fermat nicht kennen konnte. (98 Seiten)

Die Eulersche Vermutung

Euler (1707 – 1783) stellte 1769 die Vermutung auf, es gebe in den natürlichen Zahlen **keine Lösung** für die folgenden Gleichungen:

$a^4+b^4+c^4=w^4$, $a^5+b^5+c^5+d^5=w^5$, $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6=w^6$, u.s.w.

Aber wenn man so viele Summanden nimmt, wie der Exponent angibt, gibt es Lösungen:

$3^3 + 4^3 + 5^3 = 27 + 64 +125 = 216 = 6^3$

$30^4 + 120^4 + 272^4 + 315^4 = 353^4$

Zwei Jahrhunderte lang konnte die Eulersche Vermutung nicht <u>durch einen Beweis</u> bestätigt werden.

Andererseits jedoch konnte niemand eine Lösung für die Gleichungen

$a^4+b^4+c^4=w^4$, $a^5+b^5+c^5+d^5=w^5$, $a^6+b^6+c^6+d^6+e^6=w^6$, u.s.w.

angeben. Die ersten Versuche mit Papier und Bleistift und später die jahrelange Suche mit Computern erbrachten keine Lösung. Das Fehlen einer Lösung für die Gleichungen sprach stark zugunsten der Vermutung Eulers.

1967

finden Lander und Parkin durch eine reine Computersuche („brute force“) die Lösung

$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = 144^5 = 61.917.364.224$

Zu $x^4+y^4+z^4=w^4$ finden sie auf diese Art keine Lösung.

Im Jahre 1988 schließlich entdeckte Noam Elkies von der Universität Harvard folgende Lösung:

$$2.682.440^4+15.365.639^4+18.796.760^4=20.615.673^4$$

Elkies bewies danach, dass es sogar unendlich viele Lösungen gibt.

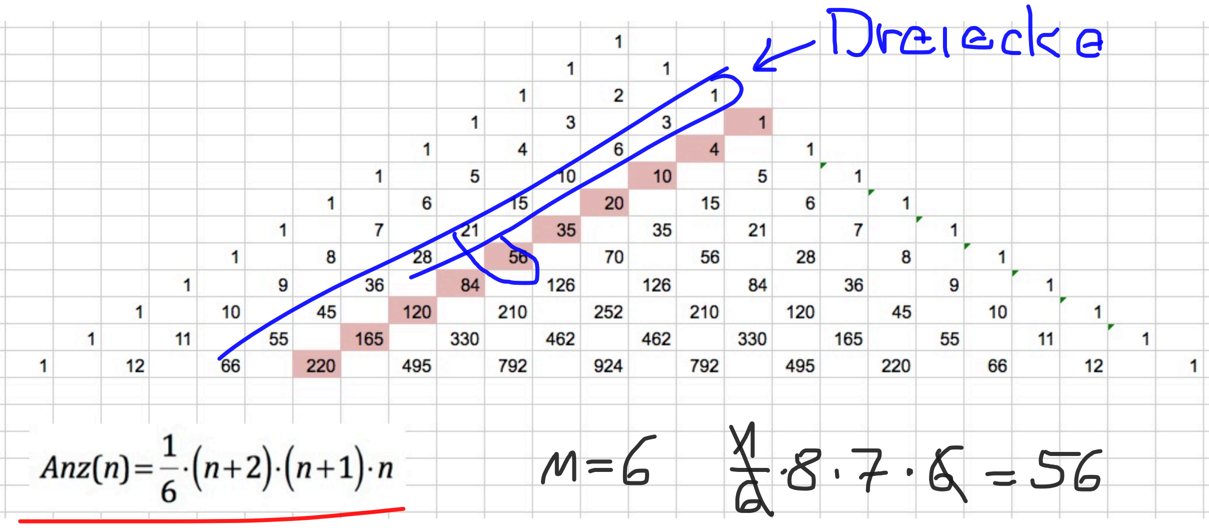
Die kleinste mögliche Lösung lautet $95.800^4 + 217.519^4 + 414.560^4 = 422.481^4$.

Für die Eulersche Vermutung mochte noch so viele vergebliche Versuche sprechen, sie stellte sich als falsch heraus. Dies bestätigt noch einmal, dass die Resultate, die man aus den ersten Hunderttausend Zahlen gewinnt, nicht zum Beweis einer Vermutung über alle Zahlen taugen.

Warum kann man mit dem Computer keine Lösung finden?
Probiert man systematisch die Zahlen durch, so kommt man auf
a=1: 1,1,1
a=2: 2,1,1   2,2,1   2,2,2
a=3: 3,1,1   3,2,1   3,2,2   3,3,1   3,3,2   3,3,3
a=4: 4,1,1   4,2,1   4,2,2   4,3,1   4,3,2   4,3,3   4,4,1   4,4,2   4,4,3   4,4,4

a	b	c	w4	w	a fest		Summe
1	1	1	3	1,31607401295	1		1
2	1	1	18	2,05976714391			
2	2	1	33	2,39678172693		+2	
2	2	2	48	2,63214802590	3		4
3	1	1	83	3,01834947929			
3	2	1	98	3,14634628365			
3	2	2	113	3,26039043870			
3	3	1	163	3,57311423478			
3	3	2	178	3,65262427087		+3	
3	3	3	243	3,94822203886	6		10
4	1	1	258	4,00778971557			
4	2	1	273	4,06481385082			
4	2	2	288	4,11953428781			
4	3	1	338	4,28774723029			
4	3	2	353	4,33454660006			
4	3	3	418	4,52162009685			
4	4	1	513	4,75914943092			
4	4	2	528	4,79356345386			
4	4	3	593	4,93473315629		+4	
4	4	4	768	5,26429605181	10		20
5	1	1	627	5,00399520894			
5	2	1	642	5,03365860172			
5	2	2	657	5,06280665599			
5	3	1	707	5,15649799773			
5	3	2	722	5,18363363724			
5	3	3	787	5,29655739875			
5	4	1	882	5,44963162148			
5	4	2	897	5,47265550384			
5	4	3	962	5,56921222782			
5	4	4	1137	5,80684342825			
5	5	1	1251	5,94722442553			
5	5	2	1266	5,96497223374			
5	5	3	1331	6,04010535454			
5	5	4	1506	6,22954378938		+5	
5	5	5	1875	6,58037006476	15		35

Die Tripel a,b,c wurden immer so geordnet, dass $a \geq b \geq c$ gilt.
Man sieht, dass von $a = n$-1 zu $a = n$ jeweils n Tripel dazukommen.
Also ist für $a = n$ die Anzahl der Tripel $1+2+3+...+n = D_n$, die n-te Dreieckszahl.
Dann hat man bis zum Tripel n,n,n insgesamt
$D_1 + D_2 + D_3 + ... + D_n$ Tripel durchprobiert



andere Berechnung:

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}D_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right]\quad=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)[2n+1+3]$$

$$T_n=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

Die oben angegebene kleinste Lösung hat als größte Zahl 414.560. Folglich hätte man für *n* = 414.559 noch keine Lösung gefunden. Bis dahin hätte man aber (systematisch)

insgesamt $T_{414559}=\frac{1}{6}\cdot 414559\cdot 414560\cdot 414561\approx 11{,}87\cdot 10^{15}$

also knapp 12 Billiarden Tripel vergeblich probiert.
Nimmt man einmal an, dass ein Computer in einer Sekunde zehntausend Tripel durchprobieren kann, so braucht er für die Suche $1{,}187\cdot 10^{12}$ Sekunden.
Das sind 330 Millionen Stunden ≈ 13,7 Millionen Tage ≈ 37.600 Jahre.

Warum konnten 1967 Lander und Parkin mit dem Computer die Lösung
$133^5 + 110^5 + 84^5 + 27^5 = 144^5 = 61.917.364.224$
finden?

Wählt man vier Zahlen aus einem Vorrat von 1 bis n aus (mit Wiederholung, ohne Beachtung der Reihenfolge), so hat man an Möglichkeiten

$$A = \binom{n+3}{4} = \frac{1}{24}(n+3)(n+2)(n+1)n$$

Um zu der Lösung oben zu kommen, hat man systematisch alle Möglichkeiten bis $n = 132$ vergeblich probiert. Das sind

$A = \frac{1}{24} \cdot 135 \cdot 134 \cdot 133 \cdot 132 = 13.232.835$, also gut 13 Millionen vergebliche Versuche.

Bei der oben angegebenen Geschwindigkeit von zehntausend Versuchen pro Sekunde sind das ca. 1324 Sek. ≈ 22 Minuten.

1967 waren Computer deutlich langsamer. Aber selbst bei einem Faktor 100 ist man bei 2200 Minuten ≈ 36,7 Stunden